

Teoremas de distribuciones justas

Pablo Soberón

November 10, 2017

1 Introducción y primeras herramientas

Supongamos que en una fiesta de cumpleaños te corresponde partir el pastel. Debes darle un pedazo a cada persona de tal forma que nadie quede celoso del pedazo de otra persona, sin importar cómo son sus preferencias subjetivas. O tal vez prefieres ser justo desde otro punto de vista, y asegurarte que a cada persona le toque la misma cantidad de pastel, la misma cantidad de betún y la misma cantidad de chispas de chocolate. Además todos quieren que sus pedazos de pastel sean convexos.

La existencia de dichas particiones no es trivial, y forman parte de una familia de resultados a veces denominados como distribuciones justas. En particular, forman un punto de encuentro entre la combinatoria, la topología algebraica y la geometría. A pesar de que la motivación suele describirse con ejemplos bastante inocentes, tienen aplicaciones computacionales (en algoritmos de búsquedas de datos), en problemas de incidencia en geometría o en problemas que a primera vista son puramente de combinatoria.

Uno de los aspectos sorprendentes de estos resultados es su conexión con teoremas importantes de la topología algebraica. En este capítulo vamos a hacer énfasis en aplicaciones del teorema de Borsuk-Ulam. Vamos a denotar por S^d la esfera de dimensión d , que aparece naturalmente en \mathbb{R}^{d+1} ,

$$S^d = \left\{ (x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : x_1^2 + \dots + x_{d+1}^2 = 1 \right\}.$$

Teorema 1.1 (Borsuk-Ulam). *Para toda función continua $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, existe $\bar{x} \in S^d$ tal que $f(\bar{x}) = f(-\bar{x})$.*

Este es un resultado que requiere muy poca teoría para su demostración, y además tiene una cantidad sorprendente de aplicaciones [Mat03]. Diremos que dos puntos $\bar{x}, \bar{y} \in S^d$ son antipodales si $\bar{x} = -\bar{y}$. Como el objetivo de este capítulo no es desarrollar temas de topología algebraica sino sus aplicaciones

a teoremas de distribución justa, vamos a dar una demostración un poco informal del teorema de Borsuk-Ulam. Esta demostración es originalmente de Imre Bárány, y aparece con más detalles en [Mat03]. El resto del texto es independiente de ella.

Demostración.

Sea $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continua. Como S^d y \mathbb{R}^d tienen la misma dimensión, si f es suficientemente genérica esperaríamos que $f^{-1}(\bar{0})$ sea un conjunto finito de puntos. Si f no es de esta forma, podemos aproximarla por funciones que sí cumplen esto, y la compacidad de S^d implicaría el resultado deseado. Vamos a considerar otra función continua

$$g : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_d)$$

Notemos que los únicos puntos $\bar{x} \in S^d$ tal que $g(\bar{x}) = g(-\bar{x})$ son los polos norte y sur $\bar{x} = (0, 0, \dots, 0, \pm 1)$. El siguiente truco consiste en construir una función h cuyo dominio es el cilindro $S^d \times [0, 1]$, dada por

$$h : S^d \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$(\bar{x}, t) \mapsto t[f(\bar{x}) - f(-\bar{x})] + (1 - t)[g(\bar{x}) - g(-\bar{x})].$$

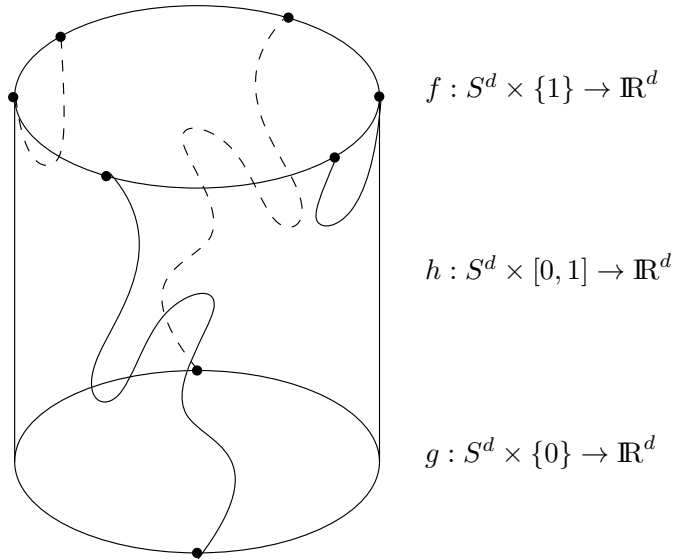


Figure 1: Idea intuitiva de cómo h relaciona la paridad del número de parejas antipodales de ceros de f y g .

Esta función es igual a $g(\bar{x}) - g(-\bar{x})$ en la esfera $S^d \times \{0\}$, y es igual a $f(\bar{x}) - f(-\bar{x})$ en la esfera $S^d \times \{1\}$. Además, $h(\bar{x}, t) = -h(-\bar{x}, t)$. Nos interesa contar la cantidad de parejas antipodales en S^d que cumplen $h(\bar{x}, 1) = \bar{0}$. Para esto, podemos fijarnos en $h^{-1}(\bar{0})$. Como $S^d \times [0, 1]$ tiene dimensión $d + 1$ y \mathbb{R}^d tiene dimensión d , si h es suficientemente genérica, esperaríamos que $h^{-1}(\bar{0})$ sea una variedad de dimensión 1. Es decir, sus componentes son ciclos y trayectorias cuyos puntos que empiezan y terminan en la frontera de $S^d \times [0, 1]$ (ver Figura 1). Esta frontera son las dos esferas de los extremos: $S^d \times \{0\}$ y $S^d \times \{1\}$. Sabemos que los polos norte y sur de $S^d \times \{0\}$ están en $h^{-1}(\bar{0})$ (es decir, sólo hay una pareja antipodal en $h^{-1}(\bar{0}) \cap (S^d \times \{0\})$). Por lo tanto deben estar en una trayectoria de $h^{-1}(\bar{0})$ que termina en $S^d \times \{1\}$, ya que no hay más puntos en $h^{-1}(\bar{0}) \cap S^d \times \{0\}$. Esto demuestra que f tiene parejas de puntos como queremos.

El hecho de que cualquier función $h : S^d \times [0, 1]$ tal que $h(\bar{x}, t) = -h(-\bar{x}, t)$ se puede aproximar por funciones suficientemente genéricas que cumplen la misma condición termina la demostración. \square

Una de las ventajas del teorema de Borsuk-Ulam es que tiene varias versiones equivalentes. Entre ellas, se encuentran las siguientes.

Equivalencia de BU 1.1. Si $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una función continua tal que $f(\bar{x}) = -f(-\bar{x})$ para todo $\bar{x} \in S^d$, entonces existe $\bar{x}_0 \in S^d$ tal que $f(\bar{x}_0) = \bar{0}$

Equivalencia de BU 1.2. Si $f : S^d \rightarrow S^n$ es una función continua tal que $f(\bar{x}) = -f(-\bar{x})$ para todo $\bar{x} \in S^d$, entonces $n \geq d$

Equivalencia de BU 1.3. Si A_1, \dots, A_d son subconjuntos cerrados de S^d de tal forma que cubren S^d , entonces algún A_i contiene dos puntos antipodales.

Ejercicio 1.2. Demuestra que cada una de las versiones mencionadas es equivalente al teorema de Borsuk-Ulam.

2 Primeras aplicaciones: sándwiches y esferas

Una de las primeras aplicaciones del teorema de Borsuk-Ulam es el teorema del sándwich de jamón. Este fue conjeturado por Steinhaus y subsecuentemente demostrado por Banach en 1938. Este es un resultado sobre familias de medidas en \mathbb{R}^d . Una medida es una función que le asigna un número real no negativo a cada conjunto de una familia. Durante el resto de este capítulo vamos a considerar a una medida μ como la integral de una función

no negativa en \mathbb{R}^d , como el área en el plano o el volumen en \mathbb{R}^3 (ambos casos son la integral de una función constante)¹.

Definición 2.1. Decimos que una medida μ en \mathbb{R}^d es una medida finita si $0 < \mu(\mathbb{R}^d) < +\infty$.

Definición 2.2. Decimos que H es un hiperplano en \mathbb{R}^d si existen $\bar{v} \in S^{d-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ de tal forma que

$$H = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \bar{x}, \bar{v} \rangle = \alpha\},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interior en \mathbb{R}^d . Los semiespacios de \mathbb{R}^d son

$$\begin{aligned} H^+ &= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \bar{x}, \bar{v} \rangle \geq \alpha\} \\ H^- &= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \bar{x}, \bar{v} \rangle \leq \alpha\}. \end{aligned}$$

También diremos que H^+ y H^- son semiespacios complementarios.

Ahora estamos listos para enunciar y demostrar el teorema del sándwich de jamón. La idea intuitiva es la siguiente. Considera que tienes dos ingredientes en una mesa: queso y jamón. Quieres hacer un corte recto que deje exactamente la mitad del jamón y exactamente la mitad del queso de cada lado. Este teorema dice que esto siempre es posible. En dimensiones más grandes, podemos partir a la mitad tantos ingredientes como la dimensión usando un hiperplano.

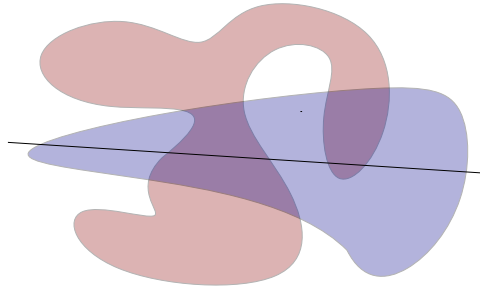


Figure 2: Ejemplo de dos medidas en el plano y una línea que las parte a la mitad.

Teorema 2.3 (sándwich de jamón). Dadas d medidas finitas μ_1, \dots, μ_d en \mathbb{R}^d , existe un hiperplano H que divide a todas las medidas a la mitad. Es decir,

$$\mu_i(H^+) = \mu_i(H^-) \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq d.$$

¹Si has visto teoría de la medida, todos los resultados a continuación funcionan en medidas sobre los conjuntos de Borel que valen cero en cualquier hiperplano

Demostración. Vamos a parametrizar el espacio X de semiespacios de \mathbb{R}^d . Notemos que cada semiespacio H^+ está determinado por una pareja (\bar{v}, α) . Además, $(\bar{v}, \alpha) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Si consideramos la función

$$\begin{aligned} \tau : X &\rightarrow S^d \\ (\bar{v}, \alpha) &\mapsto \frac{1}{\sqrt{\|\bar{v}\|^2 + \alpha^2}}(\bar{v}, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}(\bar{v}, \alpha), \end{aligned}$$

podemos notar que es casi una biyección. Hasta ahora no tenemos ningún semiespacio que vaya a dar al polo norte ni al polo sur de S^d . Sin embargo, con $\bar{v} = \bar{0}$ y $\alpha = -1$, tenemos que

$$H^+ = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \bar{x}, \bar{v} \rangle \geq \alpha\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d : 0 \geq -1\} = \mathbb{R}^d.$$

De forma semejante, con $\bar{v} = \bar{0}$ y $\alpha = 1$, tenemos que

$$H^- = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \bar{x}, \bar{v} \rangle \geq \alpha\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d : 0 \geq 1\} = \emptyset.$$

Por lo tanto, podemos agregar $\{\mathbb{R}^d, \emptyset\}$ a X y extender naturalmente τ con $\tau(\mathbb{R}^d) = (0, \dots, 0, -1)$ y $\tau(\emptyset) = (0, \dots, 0, 1)$, de tal forma que τ es una biyección entre X y S^d . Además, si $\tau^{-1}(\bar{x}) = H^+$, tenemos que $\tau^{-1}(-\bar{x}) = H^-$. Dicho de otra forma, parejas antipodales van a semiespacios opuestos por algún hiperplano². En Figura 3 se muestra qué hace la función τ .

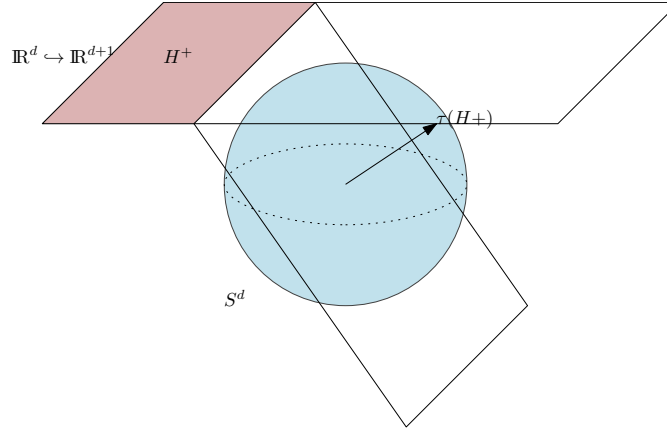


Figure 3: Si encajamos \mathbb{R}^d en \mathbb{R}^{d+1} como los vectores $(x_1, \dots, x_d, 1) \in \mathbb{R}^{d+1}$, la figura muestra cómo es que τ manda semiespacios de \mathbb{R}^d en vectores en S^d .

²Por eso algunas personas consideran \emptyset y \mathbb{R}^d como semiespacios con “el hiperplano al infinito”.

Ya que parametrizamos la familia de semiespacios, veamos cómo se usan los resultados que acabamos de demostrar. Dadas las medidas μ_1, \dots, μ_d , consideremos la función

$$f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\bar{x} \mapsto (\mu_1(\tau^{-1}(\bar{x})) - \mu_1(\tau^{-1}(-\bar{x})), \dots, \mu_d(\tau^{-1}(\bar{x})) - \mu_d(\tau^{-1}(-\bar{x})))$$

Notemos que esta función satisface $f(\bar{x}) = -f(-\bar{x})$ para todo $\bar{x} \in S^d$ y es continua. Por lo tanto, existe un $\bar{x}_0 \in S^d$ tal que $f(\bar{x}_0) = \bar{0}$. Es decir, para cada $1 \leq i \leq d$, tenemos que

$$\mu_i(\tau^{-1}(\bar{x}_0)) = \mu_i(\tau^{-1}(-\bar{x}_0)).$$

Con esto tenemos que $\tau^{-1}(\bar{x}_0)$ y $\tau^{-1}(-\bar{x}_0)$ forman la pareja de semiespacios complementarios que buscábamos. El último detalle es notar que dicha pareja de semiespacios no puede ser $\{\mathbb{R}^d, \emptyset\}$. \square

Ejercicio 2.4. *Demuestra la versión discreta del teorema del sándwich de jamón. Dados d conjuntos finitos de puntos A_1, \dots, A_d del tal forma que cada A_i tiene una cantidad par de puntos y $\cup_{i=1}^d A_i$ está en posición general³ demuestra que existe un hiperplano H que parte a la mitad a cada conjunto.*

Pista: Intenta primero el problema en \mathbb{R}^2 para obtener una idea intuitiva de qué está pasando. Dado $\varepsilon > 0$, considera $A_{(i,\varepsilon)}$ la unión de bolas de radio ε centradas en los puntos de A_i , y $\mu_{(i,\varepsilon)}$ medida uniformemente distribuida en $A_{i,\varepsilon}$. ¿Qué pasa si aplicamos el teorema del sándwich de jamón a las medidas $\mu_{(i,\varepsilon)}$ y hacemos tender $\varepsilon \rightarrow 0$? Si el hiperplano que encuentras en el límite pasa por puntos de algún A_i , ¿por qué podemos evitar eso con una perturbación del hiperplano?

Ejercicio 2.5. *Sea n un entero positivo. Supón que hay un conjunto de n puntos rojos y un conjunto de n puntos azules en el plano, de tal forma que no hay tres puntos coloreados que son colineales. Demuestra que es posible dividirlos en n parejas, cada una con un punto de cada color, de tal forma que los segmentos inducidos por cada pareja no se intersectan.*

Ejercicio 2.6. *Sea n un entero positivo. Supón que hay un conjunto de n puntos rojos, un conjunto de n puntos azules y un conjunto de n puntos verdes en \mathbb{R}^3 , de tal forma que no hay cuatro puntos coloreados en un plano. Demuestra que es posible dividirlos en n triplas, cada una con un punto de cada color, de tal forma que las envolventes convexas de cada tripleta no se intersectan.*

³Es decir, ningún hiperplano contiene más de d puntos del conjunto.

3 Collares y ladrones

Vamos a cambiar un poco el tipo de distribución que queremos hacer. Supón que tú y un amigo acaban de robar un collar. Este es un collar abierto (i.e. los pueden representar como un segmento, no como un círculo). El collar tiene perlas de d tipos, y una cantidad par de cada tipo. Tu amigo y tú quieren repartirse el collar de tal forma que cada uno obtenga exactamente la mitad de las perlas de cada tipo. Para hacer esto van a tener que cortar el collar en varios pedazos y repartirse los pedazos. ¿Cuál es el menor número de cortes con el que pueden garantizar que van a poder repartirse el collar, independientemente de la distribución de las perlas?

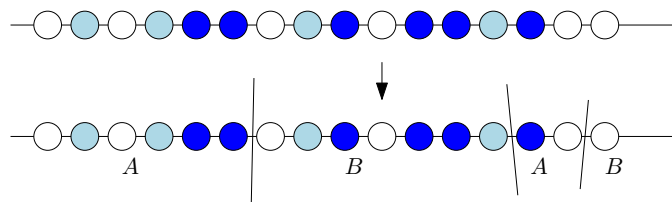


Figure 4: Ejemplo de un collar abierto con tres tipos de perlas, y una distribución justa entre dos ladrones, A y B , usando tres cortes.

Un punto en el que hay que hacer énfasis es que este es un problema 100% de combinatoria. El número de cortes para cada collar solo depende de la cantidad de perlas de cada tipo y el orden en el que vienen en el collar. Sin embargo, la solución que presentaremos es completamente topológica.

Como primer caso, veamos qué pasa si resulta que las perlas no están mezcladas. Es decir, primero están todas las perlas del primer tipo, luego todas las perlas del segundo tipo y así sucesivamente. Para poder repartir las perlas del primer tipo van a necesitar al menos un corte en el intervalo que contiene esas perlas. Ese corte no divide los intervalos que contienen a los otros tipos de perlas. Por lo tanto, van a necesitar al menos d cortes.

El resultado sorprendente es que con d cortes *siempre* se puede hacer una distribución justa. La versión continua de este resultado, cuando se usan medidas en \mathbb{R} en vez de conjuntos finitos de perlas fue demostrado por Hobby y Rice [HR65]. La versión con perlas fue demostrada subsecuentemente por Goldberg y West y por Alon y West [GW85, AW86]. El truco de la demostración que presentamos es encajar el collar en \mathbb{R}^d de forma inteligente.

Definición 3.1. La curva de momentos γ_d en \mathbb{R}^d se define como

$$\gamma_d = \{(\beta, \beta^2, \dots, \beta^d) : \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Lema 3.2. *Un hiperplano H en \mathbb{R}^d intersecta a γ_d en a lo más d puntos.*

Demostración. Supongamos que $(v_1, \dots, v_d) = \bar{v} \in S^{d-1}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ son tales que $H = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \bar{x}, \bar{v} \rangle = \alpha\}$. Si además $\bar{x} = (\beta, \beta^2, \dots, \beta^d)$, entonces esto se traduce a

$$-\alpha + v_1\beta + v_2\beta^2 + \dots + v_d\beta^d = 0.$$

Sin embargo, el polinomio $P(y) = -\alpha + v_1y + \dots + v_dy^d$ no es constante porque $\bar{v} \neq \bar{0}$, por lo que tiene a lo más d raíces distintas en los reales. Eso quiere decir que H tiene a lo más d puntos de γ_d . \square

Ahora sí estamos listos para demostrar el teorema de los collares.

Teorema 3.3 (Teorema de los collares). *Dado un collar abierto con d tipos de perlas y una cantidad par de cada tipo de perlas, es posible repartirlo de forma justa entre dos ladrones usando a lo más d cortes.*

Demostración. Podemos colocar el collar en la curva de momento $\gamma_d \subset \mathbb{R}^d$. Entonces, tenemos d conjuntos finitos de puntos en posición general, con una cantidad par de puntos de cada tipo. Usando Ejercicio 2.4, hay un hiperplano que separa a la mitad a cada conjunto de puntos. Este hiperplano corta a la curva de momentos en a lo más d puntos. Todos los intervalos que quedan de un lado le corresponden a un ladrón, y todos los que quedan del otro lado le corresponden al otro ladrón. \square

4 El método general

La versión general de los problemas de particiones de medidas es la siguiente.

Problema 4.1. *Dada una familia \mathcal{F} de medidas en \mathbb{R}^d y una familia \mathcal{H} de particiones de \mathbb{R}^d , ¿se puede garantizar que existe una partición $P \in \mathcal{H}$ que divide a todas las medidas en \mathcal{F} de forma equitativa?*

Hay una forma estándar de atacar un problema de este estilo, y se conoce como el *esquema de mapeo de prueba*. Consiste en dividir el problema en su parte geométrica y su parte topológica. Para esto, dado un grupo G , debemos hablar de espacios topológicos con acciones de G .

Definición 4.2. Dado un espacio topológico X , decimos que hay una acción de G en X si podemos “multiplicar elementos de G y de X ”. En otras palabras, si hay una función

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

de tal forma que

- Si $e \in G$ es el elemento neutro de G , entonces para todo $x \in X$ tenemos que $ex = x$.
- Para todo $g, h \in G, x \in X$ tenemos que $(gh)x = g(hx)$
- Para todo $g \in G$, la función $x \mapsto gx$ es continua.

Además, si para todo x la única solución de la ecuación $gx = x$ es con $g = e$, diremos que X tiene una acción libre de G .

Ejemplo 4.3. S^d tiene una acción libre de $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ dada por $(-1)\bar{x} = -\bar{x}$. \mathbb{R}^d tiene una acción de \mathbb{Z}_2 dada por $(-1)\bar{x} = -\bar{x}$, pero no es libre.

Ejemplo 4.4. El espacio X de formas de repartir un collar entre dos ladrones usando a lo más d cortes tiene una acción libre de \mathbb{Z}_2 . Si P es un conjunto de cortes con una regla de cómo repartir los intervalos, entonces $-P$ corresponde al mismo conjunto de cortes, pero invirtiendo quién recibe qué intervalo

Ejemplo 4.5. El espacio \mathbb{R}^d tiene una acción de S_{d+1} , el grupo de permutaciones de $d+1$ elementos. Para eso, nota que podemos identificar \mathbb{R}^d como un subespacio de \mathbb{R}^{d+1}

$$\mathbb{R}^d \cong \{(x_1, \dots, x_{d+1}) : x_1 + \dots + x_{d+1} = 0\}.$$

Dada una permutación $\sigma \in S_{d+1}$ definimos

$$\sigma(x_1, \dots, x_{d+1}) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d+1)}).$$

Ejercicio 4.6. Demuestra que si d es un número primo, S^d tiene una acción libre de \mathbb{Z}_{d+1} , el grupo cíclico con $d+1$ elementos.

Pista: Usa la construcción de Ejemplo 4.5.

Ya que tenemos un poco de estructura, nos interesan las funciones que la preservan.

Definición 4.7. *Dados dos espacios topológicos X, Y con una acción de G , decimos que una función continua $f : X \rightarrow Y$ es G -equivariante si para todo $x \in X, g \in G$ se tiene que $f(gx) = gf(x)$. Denotamos esto por $f : X \rightarrow_G Y$.*

Ahora sí estamos listos para describir el esquema del mapeo de prueba. Dado un problema de particiones de medidas, haremos lo siguiente.

- **Parte geométrica.** Se parametriza \mathcal{H} con un espacio X . Luego, se construye un espacio Y de parámetros relacionados a cómo es que se están dividiendo las medidas. Esto induce de forma natural una función $f : X \rightarrow Y$. Las condiciones en las medidas suelen implicar que f es continua. Idealmente, si hay un grupo G de simetrías del problema, entonces f es G -equivariante.
- **Parte topológica** Se estudian las funciones $f : X \rightarrow_G Y$ como un problema independiente. Por ejemplo, si $y_0 \in Y$ corresponde a una partición equitativa de las medidas, se busca demostrar que *no existen mapeos continuos G -equivariantes $f : X \rightarrow_G Y \setminus \{y_0\}$.*

En el caso del teorema del sándwich de jamón, $X \cong S^d$ y $Y \setminus \{y_0\} \sim S^{d-1}$, por lo que el teorema de Borsuk-Ulam aparece naturalmente.

Hay generalizaciones del teorema de Borsuk-Ulam que resuelven la parte topológica para otras familias de particiones. En particular, está el teorema de Dold.

Teorema 4.8 (Dold 1983 [Dol83]). *Dados dos espacios topológicos X y Y con acciones libres de un grupo G tal que $|G| > 1$, si X es n -conexo y Y es paracompacto y a lo más n -dimensional, entonces no hay mapeos continuos G -equivariantes $f : X \rightarrow_G Y$.*

La demostración de este teorema (e incluso desentrañar qué dice el enunciado) excede los objetivos de este capítulo, pero es una muy buena motivación para aprender topología algebraica equivariante si te interesan más problemas de este estilo. En particular, este resultado permite extender problemas de particiones de medidas para casos en los que se busca repartir medidas entre más de dos personas. Por ejemplo, los siguientes teoremas generalizan el teorema del sándwich de jamón y el teorema de los collares y ambos se pueden demostrar con el teorema de Dold.

Teorema 4.9 (sándwiches para más de dos invitados, [Sob12, KHA13, BZ14]). *Sean r, d dos enteros positivos. Dadas μ_1, \dots, μ_d medidas finitas en \mathbb{R}^d , existe una partición de \mathbb{R}^d en r conjuntos convexos A_1, \dots, A_r de tal forma que para cada μ_i y $1 \leq j \leq k \leq r$ se tiene que*

$$\mu_i(A_j) = \mu_i(A_k).$$

Teorema 4.10 (collares para más de dos ladrones [Alo87]). *Sea r un entero positivo. Un collar con m tipos de perlas fue robado por r ladrones. La cantidad de perlas de cada tipo es un múltiplo de r . Para poder dividirse el collar de forma justa, los ladrones nunca necesitan usar más de $(r - 1)m$ cortes.*

Ejercicio 4.11. *Demuestra que el espacio de Ejemplo 4.4 es isomorfo a S^d . Usa esto para demostrar la versión continua del teorema de los collares (con medidas en vez de familias discretas de puntos) sin tener que usar el teorema del sándwich de jamón ni la curva de momentos.*

5 Pasteles y preferencias subjetivas

En los resultados anteriores, como el teorema del sándwich de jamón, las preferencias están dadas por medidas. Esto tiene como consecuencia que si te dan a elegir entre dos conjuntos A, B tales que $A \subset B$, siempre vas a preferir B .

A veces las preferencias no funcionan así. Incluso en esos casos, podemos encontrar distribuciones justas. Consideremos el siguiente caso.

Hay r personas en una fiesta y vamos a partir un en r pedazos. Podemos considerar al pastel como un intervalo, y lo vamos a partir usando $r - 1$ cortes. Para cada forma de partir el pastel, cada invitado nos va a decir qué pedazo(s) prefiere (nos dice al menos uno). Lo único que sabemos de las preferencias es lo siguiente:

- En cualquier partición, todo el mundo prefiere los pedazos no vacíos sobre los pedazos vacíos.
- Las preferencias son cerradas. Si tenemos una sucesión $\{\tau_n\}_n$ de conjuntos de $r - 1$ cortes que convergen a conjunto τ de $r - 1$ cortes, de tal forma que en cada τ_n la persona A incluye al pedazo j entre sus favoritos, entonces también lo hace en τ .

Problema 5.1. *¿Es posible partir el pastel y repartir los pedazos de tal forma que cada quién tenga un pedazo de sus favoritos?*

Una partición como la del problema es lo que llamaríamos una partición libre de envidia. Esto es porque nadie prefiere el pastel que le tocó a otra persona. Estos resultados, igual que los de las secciones anteriores, tienen detrás una maquinaria topológica. En este caso, es el teorema de KKM y el

lema de Sperner, descritos a continuación. La primera aplicación del lema de Sperner a un problema de divisiones libres de envidia fue dada por Su [Su99].

Vamos a empezar por parametrizar el espacio de particiones. Podemos considerar al pastel como el intervalo $[0, 1]$. Una partición en r pedazos corresponde a una r -ada (x_1, \dots, x_r) de tal forma que $x_i \geq 0$ para todo i , y que $x_1 + \dots + x_r = 1$. Esto quiere decir que podemos identificar al espacio de particiones con un subconjunto de \mathbb{R}^r . De hecho, la condición en la suma significa que está contenido en un hiperplano, por lo que tiene dimensión $r - 1$. Esto es lo que se conoce como el *simplejo de dimensión $r - 1$* , denotado Δ^{r-1} . Por ejemplo, con $r = 3$, es un triángulo relleno, y con $r = 4$ es un tetraedro relleno. Dados j índices i_1, \dots, i_j , decimos que el conjunto $\{(x_1, \dots, x_r) \in \Delta^{r-1} : x_{i_1} = 0, \dots, x_{i_j} = 0\}$ es una *cara de dimensión $r - j - 1$* de Δ^{r-1} .

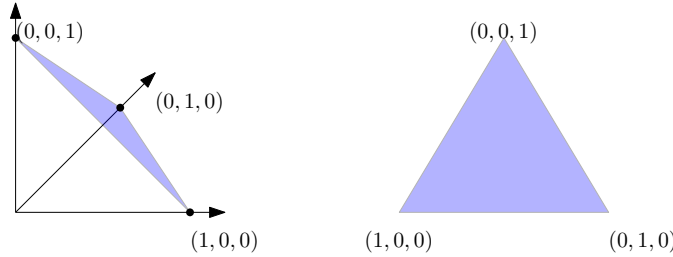


Figure 5: La figura muestra la construcción de Δ^2 . Las caras de dimensión 1 son las aristas y las caras de dimensión 0 son los vértices.

Otra forma de describir Δ^{r-1} es considerar el conjunto de vértices $v_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, v_r = (0, \dots, 0, 1)$ y notar que Δ^{r-1} es la envolvente convexa de dichos vértices. Una cara de dimensión $r - j - 1$ es simplemente la envolvente convexa de $r - j$ de sus vértices.

Consideremos una de las personas, A de la fiesta. Vamos a demostrar primero que existe una partición en la que todos los pedazos le parecen igual de buenos. Para eso, vamos a colorear el simplejo con r colores, que es lo mismo que cubrirlo con r conjuntos A_1, \dots, A_r . Una partición $\bar{x} = (x_1, \dots, x_r)$ va a ser un elemento de A_j si y solo si en \bar{x} , la persona A tiene el pedazo j entre sus favoritos. Veamos a qué se traducen las dos condiciones que tenemos.

- Dado $\bar{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \Delta^{r-1}$, podemos considerar el soporte de \bar{x} , $\text{sop}(\bar{x}) = \{j : x_j \neq 0\}$. Entonces, si $\bar{x} \in A_j$ tenemos que $j \in \text{sop}(\bar{x})$.
- Los conjuntos A_1, \dots, A_r son cerrados.

Una familia de conjuntos A_1, \dots, A_r que cumple las condiciones mencionadas es lo que llamamos una *cubierta de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz*, lo abreviaremos como *cubierta KKM*. Demostrar que hay una partición en la que todos los pedazos le parecen igual de buenos a una persona es equivalente a demostrar que en toda cubierta KKM los pedazos se intersectan. Ese es el resultado clásico de Knaster, Kuratowski y Mazurkiewicz.

Teorema 5.2 (Teorema KKM[KKM29]). *Dada una cubierta KKM A_1, \dots, A_r de Δ^{r-1} , tenemos que*

$$\bigcap_{j=1}^r A_j \neq \emptyset.$$

Para demostrar este teorema, vamos a necesitar una versión discreta, conocida como el lema de Sperner. Para esto, necesitamos hablar de triangulaciones de Δ^{r-1} .

Definición 5.3. *Una triangulación \mathcal{T} de Δ^{r-1} es una familia T_1, \dots, T_n de subconjuntos de Δ^{r-1} de tal forma que*

- *Cada T_i es un simplejo de dimensión $r - 1$ (es decir, es la envolvente convexa de r puntos)*
- *Si T_i y T_j se interesectan, la intersección es una cara de ambos de dimensión a lo más $r - 2$.*
- *Cada punto de Δ^{r-1} está en al menos un T_i .*

Diremos que los vértices de la triangulación son la unión de los vértices de cada T_i .

Ahora, en vez de cubrir Δ^{r-1} con r conjuntos, vamos a colorear los vértices de una triangulación \mathcal{T} de Δ^{r-1} con r colores.

Definición 5.4. *Dada una triangulación \mathcal{T} de Δ^{r-1} , diremos que una coloración de sus vértices con colores $\{1, 2, \dots, r\}$ es una coloración de Sperner si siempre que un vertice \bar{v} de \mathcal{T} esté coloreado de color j se tiene que $j \in \text{sop}(\bar{v})$.*

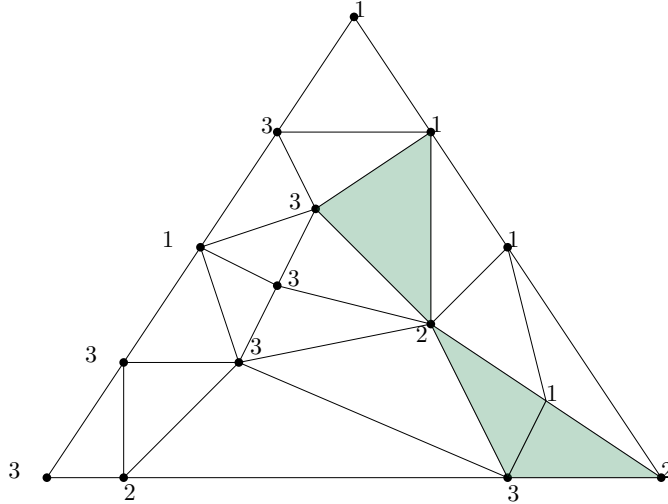


Figure 6: Una triangulación de Δ^2 con una coloración de Sperner de sus vértices. Cada vértice tiene un color distinto y cada arista solo presenta los colores de los vértices que la sostienen. Hay exactamente tres triángulos que tienen todos los colores.

El teorema importante es el siguiente (a pesar de que es conocido como el lema de Sperner, vamos a mostrarle respeto al resultado y enunciarlo como teorema).

Teorema 5.5 (Lema de Sperner [Spe28]). *Dada una triangulación \mathcal{T} de Δ^{r-1} con una coloración de Sperner, siempre hay una cantidad impar de simplejos T_i tal que sus vértices tienen todos los colores. En particular, hay al menos un simplejo que cumple dicha condición.*

Veamos cómo es que Teorema 5.5 implica Teorema 5.2.

Demostración. Sea A_1, \dots, A_r una cubierta KKM de Δ^{r-1} . Como para todo j tenemos que A_j no tiene puntos de la cara C_j opuesta al vértice \bar{v}_j de Δ^{r-1} , podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que $\text{dist}(C_j, A_j) > \delta$. Ahora, dado un ε tal que $0 < 2\varepsilon < \delta$, sea \mathcal{T} una triangulación de Δ^{r-1} de tal forma que cada simplejo de \mathcal{T} tiene diámetro a lo más ε . Dado un vértice v de \mathcal{T} , vamos a colorearlo de color j si j es algún color que cumple $\text{dist}(v, A_j) < \varepsilon$ (si hay más de una posibilidad, elegimos nuestra favorita). Las condiciones sobre ε y el hecho de que A_1, \dots, A_r forman una cubierta KKM implican que esta coloración es una coloración de Sperner.

Por lo tanto, podemos encontrar un simplejo que tiene los r colores en sus vértices. Sea p un punto en ese simplejo. Si consideramos una sucesión

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ tal que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, por la compacidad de Δ^{r-1} va a haber un punto de acumulación p^* de los puntos $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$. Por la construcción que hemos hecho tenemos que, para todo j , $p^* \in A_j$. \square

Vamos a demostrar el lema de Sperner.

Demostración. Vamos a usar inducción sobre r . Si $r = 2$, notemos que una triangulación de Sperner es una división del intervalo $[0, 1]$ en una cantidad finita de intervalos, y una coloración de los vértices de tal forma que 0 y 1 reciben colores distintos. Como empezamos y terminamos con colores distintos, debe haber una cantidad impar de subintervalos que cambian de color, como queríamos.

Ahora supongamos que el resultado es cierto para cierto r , y vamos a demostrarlo para $r + 1$. Dada una triangulación \mathcal{T} de Δ^r con su coloración de Sperner, vamos a contar el número N de parejas (M, T) de tal forma que T es un simplejo de \mathcal{T} , M es una cara de dimensión $r - 1$ de T y los vértices de M usan todos los colores $\{1, 2, \dots, r\}$ (es decir, no se repite ninguno y solo les falta el color $r + 1$). Vamos a contar a N de dos formas.

Primero, veamos que pasa si nos fijamos en T . Cada T que tenga todos los colores está en una pareja de N . Sea A la cantidad de simplejos de este tipo. Cada T que tiene todos los colores excepto $r + 1$ está en exactamente dos parejas de N . Sea B la cantidad de simplejos de este tipo. Cualquier otro simplejo no está en ninguna pareja, por lo que $N = A + 2B$. Por lo tanto, la paridad de N y A es la misma.

En segundo lugar, vamos a ver qué pasa si nos fijamos en M . Si M no está en la frontera de Δ^r , entonces debe haber dos simplejos T_1, T_2 que lo contienen, por lo que está en dos parejas de N . Sea B' la cantidad de simplejos de este tipo. Si M está en la frontera de Δ^r , por la condición de Sperner debe formar parte de la cara C_{r+1} , opuesta a \bar{v}_{r+1} . Además, M formará parte de una sola pareja de N . Si A' es la cantidad de caras M de este tipo, tenemos que $N = A' + 2B'$. Por lo tanto, la paridad de A, N, A' es la misma.

Sin embargo, la restricción de \mathcal{T} en C_{r+1} es una triangulación de Δ^{r-1} . Más aún, la coloración de \mathcal{T} en esta restricción es una coloración de Sperner. Por inducción tenemos que A' es impar. Esto implica que A es impar, como queríamos. \square

Por lo tanto, para una persona en particular, siempre existe una partición en la que no le importa qué pedazo obtiene. Curiosamente, el teorema de Sperner también nos permite obtener particiones libres de envidia para r personas. Para ello vamos a usar lo que se conoce como la subdivisión

baricéntrica de un simplejo. Dado un simplejo T de dimensión $r - 1$, su subdivisión baricéntrica es una triangulación de T en $r!$ simplejos.

Dada una permutación $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r)$ de los vértices de T , podemos construir el simplejo con vértices b_1, b_2, \dots, b_r donde b_i es el baricentro con de la cara con vértices $\{u_1, u_2, \dots, u_i\}$, para cada $1 \leq i \leq r$. Si reemplazamos a T por la unión de todos los simplejos que se obtienen de esta forma, hemos hecho lo que se conoce como una subdivisión baricéntrica. Cada simplejo de la división baricéntrica de T tiene exactamente un vértices que es el baricentro de una cara de dimensión i de T , para cada $0 \leq i \leq r - 1$.

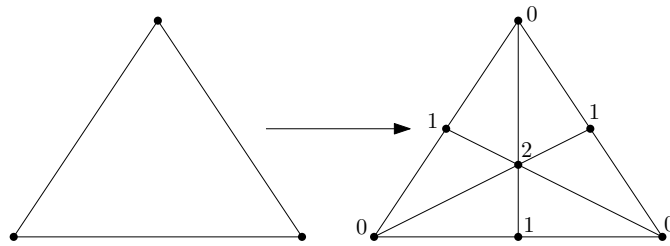


Figure 7: La división baricéntrica de un simplejo de dimensión dos. Cada vértice tiene marcada la dimensión de la cara que subdivide.

Ahora sí estamos listos para resolver el Problema 5.1, cuya respuesta es positiva. Este es un resultado de Gale de 1984 [Gal84].

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Considera \mathcal{T} una triangulación de Δ^{r-1} tal que el diámetro de todos su simplejos es menor a ε . Sea \mathcal{T}' la triangulación obtenida por hacer la subdivisión baricéntrica de \mathcal{T} . Vamos a colorear los vértices de \mathcal{T}' de r colores de la siguiente forma.

- Dado un vértice v de \mathcal{T}' , si v subdividió una cara de dimensión i de \mathcal{T} , vamos a colorearlo de color j si la persona i tiene al pedazo j entre sus favoritos cuando se usa la partición v . Si hay más de un favorito, elegimos cualquiera.

Como nadie quiere los pedazos vacíos, esta es una coloración de Sperner de Δ^{r-1} , por lo que hay un simplejo que tiene todos los colores. Si hacemos $\varepsilon \rightarrow 0$, podemos obtener la partición deseada. \square

Ejercicio 5.6. Termina la demostración anterior. ¿Por qué es que hacer $\varepsilon \rightarrow 0$ implica que podemos encontrar una división del pastel sin envidias?

References

- [Alo87] Noga Alon, *Splitting necklaces*, Adv. Math. **63** (1987), no. 3, 247–253.
- [AW86] Noga Alon and Douglas B. West, *The Borsuk-Ulam theorem and bisection of necklaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **98** (1986), no. 4, 623–628.
- [BZ14] Pavle V. M. Blagojević and Günter M. Ziegler, *Convex equipartitions via Equivariant Obstruction Theory*, Israel J. Math. **200** (2014), no. 1, 49–77.
- [Dol83] A. Dold, *Simple proofs of some Borsuk-Ulam results*, Contemp. Math **19** (1983), 65–69.
- [Gal84] D. Gale, *Equilibrium in a discrete exchange economy with money*, Internat. J. Game Theory **13** (1984), no. 1, 61–64. MR 741586
- [GW85] Charles H. Goldberg and Douglas B. West, *Bisection of Circle Colorings*, SIAM. J. on Algebraic and Discrete Methods **6** (1985), no. 1, 93–106.
- [HR65] Charles R. Hobby and John R. Rice, *A Moment Problem in L_1 Approximation*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), no. 4, 665.
- [KHA13] Roman N. Karasev, Alfredo Hubard, and Boris Aronov, *Convex equipartitions: the spicy chicken theorem*, Geom Dedicata **170** (2013), no. 1, 263–279.
- [KKM29] Bronisław Knaster, Casimir Kuratowski, and Stefan Mazurkiewicz, *Ein beweis des fixpunktsatzes für n -dimensionale simplexe*, Fundamenta Mathematicae **14** (1929), no. 1, 132–137.
- [Mat03] Jiří Matoušek, *Using the Borsuk–Ulam theorem: Lectures on topological methods in combinatorics and geometry*, Springer, 2003.
- [Sob12] Pablo Soberón, *Balanced Convex Partitions of Measures in R^d* , Mathematika **58** (2012), no. 01, 71–76.
- [Spe28] Emanuel Sperner, *Neuer beweis für die invarianz der dimensionzahl und des gebietes*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, vol. 6, Springer, 1928, pp. 265–272.

- [Su99] Francis Edward Su, *Rental harmony: Sperner's lemma in fair division*, Amer. Math. Monthly **106** (1999), no. 10, 930–942.