Avanzados - día 1

Problema 1. Dados 13 puntos con cordenadas enteras en el plano, siempre hay 3 cuyo baricentro tiene cordenadas enteras.

Problema 2. (Ibero 1998) En una reunión de representantes de n paises ($n \geq 2$), los representantes se sientan en una mesa redonda. Sabemos que para cualesquiera dos representantes del mismo país, sus vecinos del lado derecho no pertenecen al mismo país. Encuentra el mayor número posible de representantes en la reunión.

Problema 3. Para cada n, demuestra que existe un número de Fibonacci que termina con al menos n ceros.

Problema 4. (Rusia 2000) Las casillas de un tablero de 100×100 se colorean de cuatro posibles colores. Sabemos que cada fila y cada columna tienen exactamente 25 casillas de cada color. Demuestra que podemos encontrar 4 casillas que forman un rectángulo paralelo a la cuadrícula de tal forma que cada una tiene un color distinto.

Problema 5. (Vietnam 2007) Dado un 2007-ágono regular, encuentra el menor entero positivo k tal que para cualesquiera k vértices del 2007-ágono siempre podemos encontrar cuatro de ellos de tal forma que el cuadrilátero convexo que forman comparte tres lados con el 2007-ágono original.

Problema 6. Demuestra que si tenemos 6 puntos en el plano y todas sus posibles aristas se colorean de rojo o azul, entonces se forman al menos dos triángulos monocromáticos con vértices en los puntos originales.

Problema 7. (OMM 1998) Los lados y diagonales de un octágono regular se colorean de rojo o azul. Demuestra que se forman al menos siete triángulos monnocromáticos con vértices en los vértices del octágono regular.

Problema 8. (IMO 1964) 17 personas se comunican por correo. En cada intercambio entre dos personas, discuten exactamente uno de tres temas posibles. Demuestra que podemos encontrar tres personas que discutieron exactamente un tema entre ellos.

Problema 9. Demuestra que si l, s son enteros positivos, entonces

$$r(l,s) \leq \binom{l+s-2}{l-1}$$

Problema 10. Demuesta que $r(3,4) = 9$.

Problema 11. (Rusia 1972) Se tienen 50 segmentos de recta. Demuestra que siempre podemos encontrar 8 segmentos que comparten un punto, u 8 segmentos tal que no hay dos de ellos que se intersecten.

Problema 12. Se colorean los puntos del plano de rojo, verde o azul. Demuestra que hay dos puntos del mismo color a distancia 1.

Problema 13. Sea T un triángulo en el plano. Se colorean todos los puntos del plano rojo o azul. Demuestra que o bien hay dos puntos azules a distancia 1, o hay una copia trasladada de T cuyos vértices son todos rojos.

Problema 14. Se tienen $n^2 + 1$ líneas rojas de tal forma que ninguna es vertical y no hay dos de ellas paralelas. Además, tenemos una línea vertical ℓ. Sabemos que ℓ no contiene la intersección de ningún par de líneas rojas. Demuestra que siempre podemos encontrar $n+1$ líneas rojas tal que todas sus intersecciones están del lado izquierdo de ℓ, o $n+1$ líneas rojas tal que todas sus intersecciones están del lado derecho de ℓ.

Problema 15. Tenemos M subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de tal forma que no hay dos conjuntos, uno contenido en el otro. Demuestra que

$$M \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Problema 16. (PUTNAM 2013) Recuerda que un icosaedro regular es un poliedro regular con 12 vértices y 20 caras, las caras son triángulos equiláteros congruentes. En cada cara de un icosaedro regular se escribe un entero no negativo de tal forma que la suma de los 20 enteros es 39. Demuestra que hay dos caras que comparten un vértice y que tienen el mismo número escrito en ellas.

Problema 17. (Putnam 1954) Demuestra que para cualesquiera cinco puntos en el interior de un cuadrado de lado 1 se existen dos a distancia menor que $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Problema 18. Demuestra que para cualesquiera 7 puntos en un hexágono regular de área 1, hay tres que forman un triángulo de área menor o igual a $\frac{1}{6}$.

Problema 19. (Putnam 2016) Sea S un conjunto finito de puntos en el plano de tal forma que cualquier triángulo formado por vértices de S tiene área menor o igual a 1. Demuestra que existe un triángulo de área 4 que cubre a S.

Problema 20. Dados n enteros positivos, demuestra que hay un subconjunto no vacío de ellos cuya suma es múltiplo de n.

Problema 21. (Putnam 1993) Sean $x_1, \ldots, x_{19}$ enteros positivos tal que ninguno es mayor a 93. Sean $y_1, \ldots, y_{93}$ enteros positivos tal ques ninguno es mayor a 19. Demuestra que existe un subconjunto no vacío de los x_i y un subconjuntos no vacío de los y_j cuyca suma son iguales.

Problema 22. Se tienen n carros estacionados en una carretera circular. En total, la gasolina que tienen es suficiente para dar exactamente una vuelta al circuito. Demuestra que alguno de los carros puede dar una vuelta entera al circuito si al pasar por cualquier otro carro le quita la gasolina.

Problema 23. (Putnam 1995) Se tienen n enteros (posiblemente negativos) en un collar, de tal forma que su suma es $n-1$. Demuestra que es posible cortar el collar en algún punto para que los n número queden como una sucesión $x_1, \ldots, x_n$ de tal forma que para todo $1 \leq k \leq n$ se tiene que

$$x_1 + \ldots + x_k \leq k - 1.$$

Problema 24. (Rumania 2004) Sea $n \geq 2$ un entero y X un conjunto con n elementos. Sean $A_1, \ldots, A_{101}$ de tal forma que la unión de cualesquiera 50 de ellos tiene más de $\frac{50}{51}n$ elementos. Demuestra que existen 3 de ellos tales que cualesquiera dos de esos tres se intersectan