Iniciales - día 1

Problema 1. En un tablero de ajedrez se coloca un rey en la esquina inferior izquierda. Dos personas, A y B, juegan por turnos a mover el rey. En cada turno, solo está permitido mover el rey a la derecha, hacia arriba, o en diagonal arriba-derecha. Decide quién tiene estrategia ganadora si

- El primer jugador en llegar a la esquina superior derecha gana.
- El primer jugador en llegar a la esquina superior derecha pierde.

Problema 2. Se tienen tres montones de fichas, cada una con 2020 fichas. En un movimiento, está permitido quitar una ficha de cada uno de dos montones, y agregar una ficha al otro. Es posible llegar a tener un montón con exactamente una ficha y los demás vacíos?

Problema 3. Se tienen los números $1, 2, \ldots, 2020$ escritos en un pizarrón. En un movimiento, se permite borrar dos números a, b y escribir el número $ab + a + b$. Después de 2019 movimientos solo hay un número escrito en el pizarrón. Encuentra todos los posibles valores de este número.

Problema 4. Tenemos una cuadrícula de 4×4. En cada cuadrado hay una lámpara apagada. Podemos cambiar simultáneamente el estado de todas las lámparas en una fila o de todas las lámparas en una columna. Es posible llegar a que exactamente una lámpara esté prendida?

Problema 5. Tenemos una cuadrícula de 4×4. En cada cuadrado hay una lámpara apagada. Nos referimos a cada lámpara por su posición, desde $(1, 1)$ hasta $(4, 4)$. Podemos cambiar simultáneamente el estado de todas las lámparas en una fila o de todas las lámparas en una columna. También podemos cambiar simultáneamente el estado de todas las lámparas paralelas a una diagonal. Por ejemplo, podemos cambiar el estado de $(3, 1), (2, 2), (1, 3)$ al mismo tiempo. Finalmente, podemos cambiar el estado de cualquier esuina. Es posible llegar a que exactamente la lámpara $(2, 1)$ esté prendida?

Problema 6. (OMM 1999) Hay 1999 monedas en una mesa. Cada moneda tiene un lado rojo y un lado negro. Dos personas, A y B, juegan por turnos con las siguientes reglas. En cada turno, un jugador puede quitar la cantidad de monedas que quiera siempre y cuando sean todas del mismo color. En vez de eso, también puede voltear la cantidad de monedas que quiera, siempre y cuando sean del mismo color. A juega primero y gana quién quite la última moneda. ¿Para cuales configuraciones iniciales tiene estrategia ganadora A?

Problema 7. Dos personas, A y B, juegan por turnos con cerillos en una mesa. Inicialmente hay 2020. En cada turno, se permite quitar cualquier cantidad de cerillos que sea un divisor de la cantidad de cerillos que quedan. A juega primero y gana quién quite el último cerillo. ¿Quién tiene estrategia ganadora?

Problema 8. Se tienen 2020 monedas en una hilera. Las monedas tienen distintas denominaciones. A y B juegan por turnos a quitar monedas. En cada turno, se permite quitar una moneda de los extremos de la hilera. Gana quién se quede con la mayor cantidad de dinero. A juega primero. ¿quién tiene estrategia no perdedora?

Problema 9. (OMM 2007) En cada cuadrado de una cuadrícula de 6×6 tenemos una luciérnaga apagada o encendida. Una movida es escoger tres cuadrados consecutivos ya sean los tres verticales o los tres horizontales y cambiar el estado de las tres luciérnagas que se encuentran en dichos cuadrados. Cambiar el estado de una luciérnaga significa que si está apagada se prende y si está prendida se apaga. Muestra que si inicialmente una está prendida y las demás apagadas, no es posible hacer una serie de movidas de tal forma que al final todas están apagadas.

Problema 10. Dos personas A y B juegan por turnos a colocar caballos en un tablero de ajedrez. A coloca caballos blancos y B coloca caballos negros. En cada turno, no está permitido colocar un caballo en una casilla atacada por un caballo del otro color. El primer jugador que no puede colocar un caballo pierde. Si A juega primero, ¿quién tiene estrategia ganadora?

Problema 11. El *ajedrez doble* se juega con las mismas reglas que el ajedrez pero en cada turno cada jugador puede hacer dos movidas. Si A y B juegan ajedrez doble y A juega primero, demuestra que A tiene estrategia no perdedora.

Problema 12. Se tienen 2019 canastas. Cada canasta tiene cierta cantidad de manzanas y cierta cantidad de peras. Demuestra que podemos encontrar 1010 canastas tales que entre ellas tengan al menos la mitad de la cantidad total de manzanas y al menos la mitad de la cantidad total de peras.

Problema 13. Tenemos tres números escritos en un pizarrón: $2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2}$. Podemos hacer la siguiente operación: elegimos dos números a y b, los borramos, y escribimos los números $(a+b)/\sqrt{2}$ y $(a-b)/\sqrt{2}$. Es posible llegar a tener $1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$ en el pizarrón?

Problema 14. (Putnam 2002) A y B jugan por turnos con un poliedro de al menos 5 caras. De cada vértice del poliedro salen exactamente tres aristas. En cada turno, se permite firmar una cara que no haya sido firmada antes. Gana el primer jugador que firme tres caras que comparten un vértice. Si A juega primero, ¿quién tiene estrategia ganadora?